

УДК 519.633+533.517.4

С. В. Ершов*, д-р. техн. наук

* Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины
(г. Харьков, E-mail: yershov@ipmach.kharkov.ua)

ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ВО ВХОДНОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ ДЛЯ $k-\omega$ МОДЕЛЕЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Предложена постановка граничных условий для моделей турбулентности типа $k-\omega$ на границе входа, проходящей как по ядру потока, так и в пограничном слое. Особое внимание уделяется физической достоверности турбулентных параметров вдоль границы и их непрерывности.

Запропоновано постановку граничних умов для моделей турбулентності типу $k-\omega$ на межі входу, що проходить як ядром потоку, так і в примежовому шарі. Особливу увагу приділено фізичній достовірності турбулентних параметрів вздовж межі та їх неперервності.

Введение

В настоящее время широкое распространение получило моделирование течений газа на основе численного решения осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса замкнутых полуэмпирическими моделями турбулентности. Для адекватного описания турбулентных потоков важную роль играют вопросы корректной постановки граничных условий. И если для основных переменных потока (давление, плотность, скорость) разработаны физически оправданные способы задания на границах, то определение характеристик турбулентности (кинетическая энергия турбулентности и удельная скорость диссипации) на границах не всегда достаточно обосновано.

Существование пограничного слоя на входных границах расчетной области характерно для различных задач вычислительной аэродинамики, таких, как течение в каналах, решетках и т.д. Неточности в граничных условиях для

турбулентных масштабов в пограничных слоях на входе могут не только затруднить анализ течения при визуализации численного решения, но и привести к погрешностям моделирования, в частности, при определении потерь, характерных параметров турбулентности и т.п. Поэтому вопрос постановки граничных условий в пограничном слое для современных моделей турбулентности представляет определенный интерес.

Известные реализации граничных условий во входном пограничном слое для двухпараметрических моделей турбулентности

Для двухпараметрических моделей турбулентности типа k - ω на входной границе обычно фиксируются величины кинетической энергии турбулентности k и удельной скорости диссипации ω (например, [1]). При этом значение кинетической энергии турбулентности на входе может быть связано с интенсивностью турбулентности Tu и скоростью основного потока U_∞ как

$$k_0 = \frac{3}{2}(Tu \cdot U_\infty)^2, \quad (1)$$

а значение удельной скорости диссипации на входе определяется по скорости в ядре потока и характерному линейному масштабу L

$$\omega_0 = c_{in} \frac{U_\infty}{L}, \quad (2)$$

где c_{in} – константа. Возможны и другие способы вычисления величин k и ω на входе (см. [2-4] и др.). Подобная процедура постановки граничных условий часто используется и во входных пограничных слоях [2, 4 и др.], хотя получаемые распределения турбулентных параметров на входе в этом случае не согласуются с физикой турбулентного пограничного слоя.

В ряде работ для уточнения задания величин кинетической энергии турбулентности k и удельной скорости диссипации ω в пограничном слое на входе рекомендуется использовать известный профиль скорости в пограничном слое (обычно по степенному закону $1/7$) [5], модель Прандтля для турбулентной вязкости и длину пути смещения [5, 6], условие равновесности турбулентности на входе [7], различные полуэмпирические соотношения для тур-

булентного потока [5, 8, 9]. Не будем далее приводить все известные способы постановки граничных условий на входе, отметим только, что универсального подхода, который бы позволял задать кинетическую энергию турбулентности и удельную скорость диссипации на входе непрерывными для достаточно произвольных условий течения и в соответствии с их физикой, по-видимому, до сих пор не существует (автору не известны публикации, в которых предлагается подобный подход). Поэтому в настоящей статье ставится цель разработать такие граничные условия.

Предлагаемая постановка граничных условий

Рассмотрим границу, через которую турбулентный поток втекает в расчетную область (рис. 1). Считаем, что основная часть этой границы проходит через ядро потока, в котором известны степень турбулентности Tu и скорость потока U_∞ . В то же время края этой границы с одной или двух сторон упираются в непроницаемую стенку, на которой существует развитый равновесный турбулентный пограничный слой известной толщины δ .

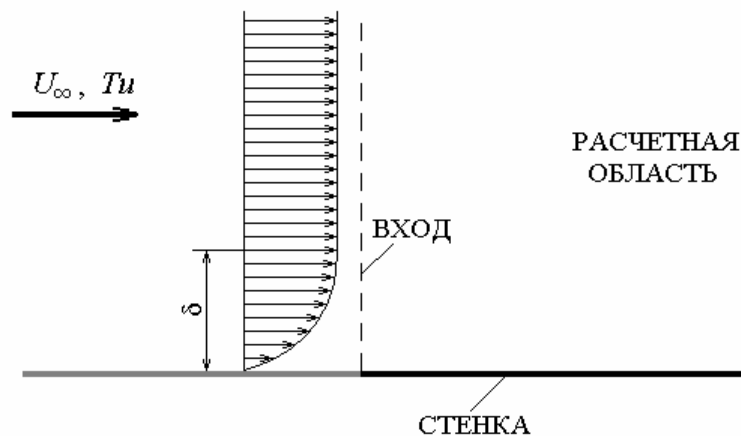


Рис. 1. Граница входа расчетной области

В ядре потока будем определять кинетическую энергию турбулентности по степени турбулентности потока согласно уравнению (1), а удельную скорость диссипации – по формуле (2).

Как уже отмечалось выше, в развитом турбулентном пограничном слое данные граничные условия неприменимы. Поэтому если входная граница рас-

четной области проходит через такой пограничный слой, то необходимо определять параметры турбулентности в соответствии с его характеристиками. В качестве основных масштабов удобно выбрать коэффициент турбулентной вязкости и удельную скорость диссипации, а затем через них определить кинетическую энергию турбулентности.

Во внутренней области пограничного слоя выполняется следующее соотношение для коэффициента турбулентной вязкости $\hat{\nu}$ [10]:

$$\hat{\nu}_1 = l^2 S,$$

где S – величина тензора скоростей деформации; l – длина пути смешения, которая с учетом демпфера Ван-Драйста имеет вид [11]

$$l = \kappa y \left[1 - \exp\left(-\frac{y^+}{A^+}\right) \right]. \quad (3)$$

В формуле (3) y – расстояние от стенки; y^+ – безразмерное расстояние от стенки в представлении закона стенки; A^+ и κ – константы.

Величина удельной скорости диссипации во внутренней области пограничного слоя может быть определена из условия равновесности турбулентности на входе [10]

$$\omega_1 = \frac{S}{\sqrt{\beta^*}}. \quad (4)$$

Во внешней логарифмической области пограничного слоя используем формулу Клаузера для турбулентной вязкости с функцией перемежаемости Клебанова [11]

$$\hat{\nu}_2 = 0.0168 U_\infty \delta^* \left[1 + 5.5 \left(\frac{y}{\delta} \right)^6 \right]^{-1} \quad (5)$$

и соотношение между толщиной пограничного слоя и толщиной вытеснения δ^* [12]

$$\delta^* = 0.095 \delta. \quad (6)$$

Из уравнений (5) и (6), исключив деление на толщину пограничного слоя, получим

$$\hat{v}_2 = 0.001596 \cdot U_\infty \delta^7 [\delta^6 + 5.5y^6]^{-1}.$$

Величина удельной скорости диссипации во внешней области пограничного слоя должна продолжать снижаться при удалении от стенки согласно (4) по мере уменьшения сдвига и в итоге выйти на значение в ядре потока, определенное формулой (2). Поэтому в данной области можно использовать следующее определение, которое обеспечит непрерывность величины ω вдоль границы входа

$$\omega_2 = \max(\omega_1, \omega_0).$$

Кинетическая энергия турбулентности во внутренней и внешней зонах пограничного слоя может быть рассчитана по коэффициенту турбулентной вязкости и удельной скорости диссипации следующим образом [13]:

$$k = \omega \hat{v}. \quad (7)$$

Последняя формула может быть использована и в ядре потока, если коэффициент турбулентной вязкости найти из уравнения (1) и (7):

$$\hat{v}_0 = \frac{\frac{3}{2}(Tu \cdot U_\infty)^2}{\omega_0}.$$

Приведенная выше процедура нахождения параметров турбулентности на входе не является полной, так как не заданы границы между основным потоком, внешней и внутренней областями пограничного слоя. Для обеспечения непрерывности величины коэффициента турбулентной вязкости и, следовательно, кинетической энергии турбулентности целесообразно, по аналогии с моделью Болдуина-Ломэкса [14], считать, что граница между любыми двумя зонами течения проходит через точки, в которых оказываются равными значения коэффициента турбулентной вязкости, определенные по формулам для рассматриваемых зон. Тогда алгоритм расчета параметров турбулентности на входе может быть окончательно записан, как это приведено на рис. 2.

Численное исследование

Предложенный алгоритм протестирован при решении осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса совместно с моделью турбулентности

```

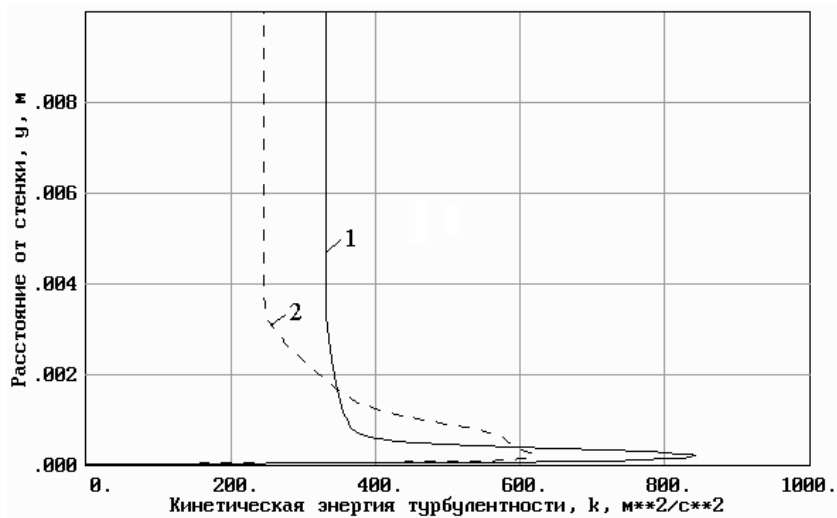
if  $\hat{v}_2 \leq \hat{v}_0$  then
     $\hat{v}_{20} = \hat{v}_0$ ;  $\omega_{20} = \omega_0$ 
else
     $\hat{v}_{20} = \hat{v}_2$ ;  $\omega_{20} = \omega_2$ 
endif
if  $\hat{v}_1 \leq \hat{v}_{20}$  then
     $\hat{v} = \hat{v}_1$ ;  $\omega = \omega_1$ 
else
     $\hat{v} = \hat{v}_{20}$ ;  $\omega = \omega_{20}$ 
endif
 $k = \omega \hat{v}$ 

```

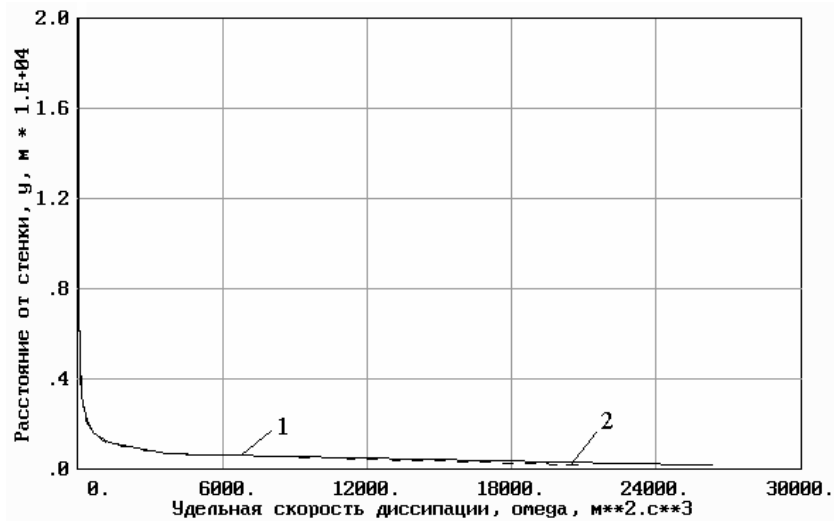
Рис. 2. Алгоритм расчета турбулентных параметров на границе входа

ниже по потоку (кривая 2). Кинетическая энергия турбулентности представлена на рис. 3,а, и аналогичные графики для удельной скорости диссипации даны на рис. 3,б. Изолинии кинетической энергии турбулентности вблизи границы входа изображены на рис. 4. Из приведенных результатов видно, что предложенные граничные условия позволяют задавать на входной границе непрерывные распределения параметров турбулентности. Важно, что распределение параметров турбулентности в пограничном слое соответствует физике течения, а именно, кинетическая энергия турбулентности у стенки стремится к нулю, возрастает в пограничном слое и затем убывает, выходя на некоторое малое значение в ядре потока, в то время как удельная скорость диссипации у стенки принимает большие значения и монотонно снижается при увеличении расстояния от стенки. По мере удаления от границы входа кинетическая энергия турбулентности в ядре потока и в пограничном слое несколько уменьшается, а значения удельной скорости диссипации остаются практически неизменными. Небольших изменений кинетической энергии турбулентности в направлении потока, по-видимому, можно добиться, согласовав профиль скорости в пограничном слое с параметрами турбулентности.

SST k - ω [15]. В качестве примера рассматривалось сверхзвуковое течение на входной границе при числе Маха $M = 2$ с пограничным слоем толщиной $\delta = 0,003$ м и степенью турбулентности основного потока от 0 до 10 %. Профиль скорости во входном сечении формировался по степенному закону $1/7$. На рис. 3 для степени турбулентности на входе 3% показаны распределения параметров k и ω поперек пограничного слоя непосредственно на границе входа (линия 1) и на расстоянии приблизительно пяти толщин пограничного слоя



а)



б)

Рис. 3. Распределение кинетической энергии турбулентности и удельной скорости диссипации поперек пограничного слоя:

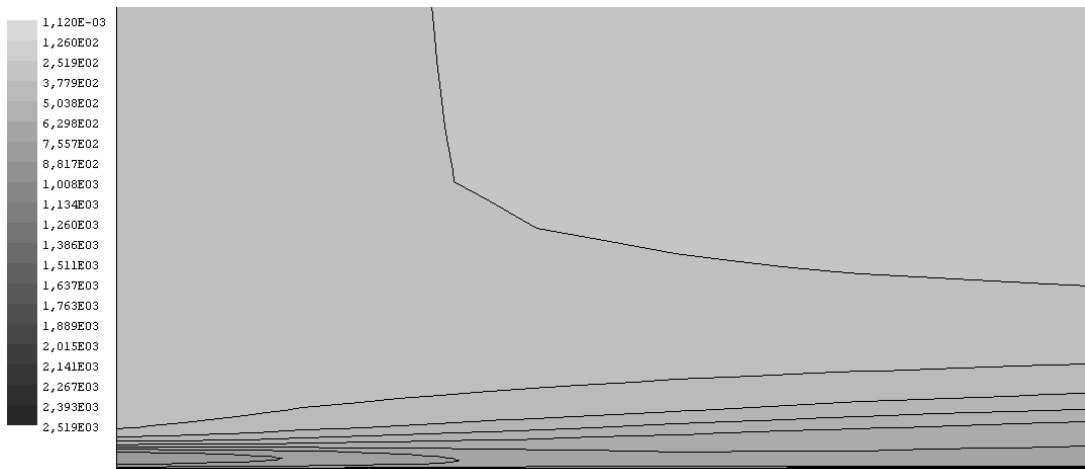
1 – входное сечение; 2 – сечение на расстоянии 5δ от входа

Заключение

Предложена постановка граничных условий для кинетической энергии турбулентности и удельной скорости диссипации на входной границе при наличии пограничного слоя. Рассмотренная постановка является достаточно универсальной в том смысле, что при заданных толщине пограничного слоя и

степени турбулентности потока обеспечивается однозначное, непрерывное и согласованное с физикой турбулентного течения определение турбулентных масштабов.

Данная работа выполнена при финансировании за счет проекта UFAST (Нестационарные эффекты в отрыве, вызванном ударной волной) рамочной программы Еврокомиссии FP6, контракт AST4-СТ-2005-012226.



*Рис. 4. Изолинии кинетической энергии турбулентности в пограничном слое
вблизи границы входа, $Ti=3\%$*

Литература

1. *Arima T.* A Numerical Investigation of Transonic Axial Compressor Rotor Flow using a Low Reynolds Number k - ε Turbulence Model / T. Arima, T. Sonoda // ASME Paper. – 1997. – No 97-GT-082. – 17 p.
2. *Bardina J.E.* Turbulence Modeling Validation, Testing, and Development / J.E. Bardina, P.G. Huang, T.J. Coacley // NASA TM-110446. – 1997. – 98 p.
3. *Lefebvre M.* Numerical Aero-Thermal Prediction of Laminar/Turbulent Flows in a Two-Dimensional High Pressure Turbine Linear Cascade / M. Lefebvre, T. Arts // Proc. 2nd European Conf. Turbomachin. Fluid Dynamics and Thermodynamics, Antwerpen, Belgium, March 1997. – P. 401-409.
4. *Ho Y-H.* Computational Modeling of Three Dimensional Endwall Flow through a Turbine Rotor with Strong Secondary Flows / Y-H. Ho, B. Lakshminarayana // ASME Paper. – 1994. – No 94-GT-136. – 12 p.

5. *Lai K.Y.* Three-Dimensional Flow Pattern Upstream Of A Surface-Mounted Rectangular Obstruction / K.Y. Lai; A.H. Makomaski // *J. Fluids Eng.* – 1989. – **69**, N 4. – P. 449–463.
6. *Schulz H.* Calculation of Three-Dimensional Viscous Flow in Hydrodynamic Torque Converters / H. Schulz, R. Greim, W. Volgmann // *Trans. ASME. J. Turbomachin.* – 1996. – **118**, No 3. – P. 578–589.
7. *Integration of Tracing with Computational Fluid Dynamics for Industrial Process Investigation.* Final report of a co-ordinated research project IAEA-TECDOC-1412. – International Atomic Energy Agency. – 2004. – 221 p.
8. *Badri-Narayanan M.A.* The Nonequilibrium Region of a Mixing Layer / M.A. Badri-Narayanan, S. Raghu, E.G. Tulapurkara // *AIAA J.* – 1985. – **23**, № 7. – P. 987-991.
9. *Sondak D.L.* Application of Wall Functions to Generalized Nonorthogonal Curvilinear Coordinate Systems / D.L. Sondak, R.H. Pletcher // *AIAA J.* – 1995. – **33**, № 1. – P. 33-41.
10. *Pope S.B.* *Turbulent Flows.* – Cambridge University Press, 2003. – 771 p.
11. *Wilcox D.C.* *Turbulence Modeling for CFD.* Second Edition. Palm Drive: DCW Industries, 2004. – 540 p.
12. *Дейч М.Е.* *Техническая газодинамика.* – М.: Госэнергоиздат, 1961. – 671 с.
13. *Tennekes H.* *A First Course of Turbulence* / H. Tennekes, J.L. Lumley – Cambridge: The MIT Press, 1972. – 300 p.
14. *Baldwin B.S.* Thin Layer Approximation and Algebraic Model for Separated Turbulent Flows / B.S. Baldwin, H. Lomax // *AIAA Paper.* – 1978. – № 78-257. –P. 1–8.
15. *Menter F.R.* Two-Equation Eddy-Viscosity Turbulence Models for Engineering Applications // *AIAA J.* – 1994. – **32**, No 8. – P. 1598 – 1605.

Поступила в редакцию

06.02.08

S.V.Yershov

Boundary conditions at inlet boundary layer for k - ω eddy-viscosity models

For k - ω eddy-viscosity models the formulation of boundary conditions at inlet boundary passing through both flow core and boundary layer is suggested. Special emphasis is placed on physical validity of turbulent quantities and their continuity along the boundary.